复变函数在不同圆环域内洛朗展开的探究

袁志杰,张神星

(合肥工业大学 数学学院,安徽 合肥 230000)

摘　要: 针对解析函数在同圆心的不同圆环域内洛朗级数,给出了这些洛朗级数的系数之差与函数在两个圆环之间的极点的关系。特别地,由有理函数在某一圆环内的洛朗展开可以直接得到它在同圆心的任一圆环域内的洛朗级数。

关键词: 解析函数; 洛朗级数; 有理函数

中图分类号: O 174.5　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1671-6132(2024)03-0038-04

0　引言

复变函数论以微积分为基础,以解析函数为主要研究对象,研究复数域上的函数理论和性质。复变函数在孤立奇点处可以展开为洛朗级数,该级数是揭示解析函数在孤立奇点处性质的重要手段,是连接柯西积分公式理论与留数定理应用的重要桥梁。复变函数的孤立奇点分为可去奇点、极点和本性奇点,其中前两种是最重要的类型,不仅判别方法丰富,在这些奇点处的留数也广泛应用于计算复积分以及某些类型的实积分和广义积分[1-2],本文主要对它们的洛朗级数展开研究。

复变函数在圆环域内如何进行洛朗展开在不同教材中均有详细介绍,主要采用将函数间接展开的方法[3-5]。除此之外,文献[6]针对极点求导计算洛朗级数的系数,文献[7]采用如逐项求导、逐项积分等技巧求出了一些复杂函数的洛朗级数。文献[8]给出了调和函数的广义洛朗级数的存在性及性质,文献[9]基于 Muskhelishvili 框架提出了改进的洛朗级数来增强弹性矩阵的复势。这些工作偏重的是复变函数在单个圆环域内的洛朗展开,没有把同圆心的不同圆环域内的洛朗级数放在一起考虑,而同一复变函数在相同圆心的不同圆环域内的洛朗展开其形式上往往有着一定的关联,本文首次对这一现象进行描述并揭示其背后的原因,得到了一些理论上的结果。

1　一般的解析函数情形

本文假定复变函数 $f(z)$ 在所讨论的圆环域内解析,这是函数能够展开为复级数的充要条件。在以 z_0 为圆心的圆环域内,$f(z)$ 可以展成为洛朗级数,即洛朗定理。

定理 1[10]　设 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z-z_0|<R$ 内解析,其中 $0\leqslant r<R\leqslant+\infty$,则 $f(z)$ 有如下的洛朗展开式

$$f(z)=\sum_n a_n(z-z_0)^n, 0\leqslant r<|z-z_0|<R,$$

这里 $a_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_K\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$,$K$ 是圆环域 $r<|z-z_0|<R$ 内包含着 z_0 的闭路。

现在考虑 $f(z)$ 在同圆心的不同圆环域内的洛朗展开系数的关系,即有如下结论成立。

定理 2　设 $f(z)$ 在两个不同的圆环域内有洛朗展开

$$f(z)=\sum_n a_n(z-z_0)^n,\quad 0\leqslant r_1<|z-z_0|<R_1,$$

$$f(z)=\sum_n b_n(z-z_0)^n,\quad r_2<|z-z_0|<R_2\leqslant+\infty,$$

收稿日期: 2023-12-20

基金项目: 国家自然科学基金(12001510);中央高校基础科研业务费(JZ2023HGTB0217);安徽省教学改革项目(2022jyxm1232)

作者简介: 袁志杰(1979—　),河北唐山人,讲师,主要从事大数据处理中的数学方法方面的研究。

其中,$0\leqslant r_1<R_1\leqslant r_2<R_2\leqslant+\infty$。如果$f(z)$在$R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2$内没有本性奇点,则$c_n=b_n-a_n$作为整数$n\in\mathbf{Z}$的函数,是有限多个形如$n^{\alpha}(\lambda-z_0)^{-n}$函数的线性组合,其中$\lambda$是$f(z)$在$R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2$内的极点,$\alpha$是小于$\lambda$的阶的非负整数。

证明:设$\lambda\neq z_0$是$f(z)$在$R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2$内奇点,$C_\lambda$是只包含$\lambda$这一个奇点的闭路。

(Ⅰ)λ是可去奇点,则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_\lambda}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}},\lambda\right]=0。$$

(Ⅱ)λ是m阶极点。令$g(z)=(z-\lambda)^m f(z)$,那么λ是$g(z)$的可去奇点。通过补充定义$g(\lambda)=\lim\limits_{z\to\lambda}(z-\lambda)^m f(z)$,可使$g(z)$在$\lambda$处解析。于是

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_\lambda}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}},\lambda\right]=$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right]^{(m-1)}\Bigg|_{z=\lambda}=\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{(n+1)\cdots(n+k)}{(\lambda-z_0)^{n+1+k}}g^{(m-1-k)}(\lambda)。$$

设K_1,K_2分别是圆环域$r_1<|z-z_0|<R_1$和$r_2<|z-z_0|<R_2$内包含着z_0的闭路,由复合闭路定理以及洛朗定理

$$c_n=b_n-a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_2+K_1^-}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=$$

$$\sum_{\lambda}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_\lambda}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\sum_{\lambda}\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{(n+1)\cdots(n+k)}{(\lambda-z_0)^{n+1+k}}g^{(m-1-k)}(\lambda),$$

其中,λ取遍$f(z)$在$R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2$内的所有极点。因此$c_n$是形如$n^{\alpha}(\lambda-z_0)^{-n}$函数的线性组合,$\alpha$是小于$\lambda$的阶的非负整数。

由定理 2,只要找到$f(z)$在$R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2$内的所有极点$\lambda$,那么$f(z)$在两个圆环域$r_1<|z-z_0|<R_1$和$r_2<|z-z_0|<R_2$内洛朗级数的系数之差$c_n$就是形如$n^{\alpha}(\lambda-z_0)^{-n}$的线性组合,组合系数主要取决于$g(z)=(z-\lambda)^m f(z)$的各阶导数在极点$\lambda$处的值,与具体的极点有关。

注 1　事实上,形如$n^{\alpha}(\lambda-z_0)^{-n}$的线性组合形成的数列$\{c_n\}$是所谓线性递推数列,即存在常数$s_0,\cdots,s_{k-1}\in\mathbb{C}$,$s_0\neq0$,使得

$$c_{n+k}=s_0c_n+s_1c_{n+1}+\cdots+s_{k-1}c_{n+k-1}。$$

对于定理 2 的情形,它的特征多项式就是

$$p(T)=T^k-s_{k-1}T^{k-1}-\cdots-s_1T-s_0=\prod_{\lambda}\left(T-\frac{1}{\lambda-z_0}\right)^{m_\lambda},$$

其中,m_λ是λ的阶,λ取遍$f(z)$在$R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2$内的所有极点。

2　有理函数情形

对于有理函数$f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$而言,除了$q(z)$的零点外均是解析的,即有理函数$f(z)$在整个复平面上的奇点只可能是可去奇点或极点,它在圆环域内的洛朗展开通常需要结合有理函数能够分解为部分分式之和[11-12]来给出。

引理 1　有理函数$f(z)$在圆环域$r<|z-z_0|<R$内的洛朗展开一定形如

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}b_n(z-z_0)^n,r<|z-z_0|<R。$$

这里

(Ⅰ)n_0是任意一个固定的整数;

(Ⅱ)$P(z)$是一个只有有限项的双边幂级数;

(Ⅲ)作为$n\in\mathbf{Z}$的函数,a_n是形如$n^{\alpha}\lambda^{-n}$函数的线性组合,其中λ是$f(z)$在$|z-z_0|\geqslant R$上的极点,α是小于λ的阶的非负整数;

(Ⅳ)作为$n\in\mathbf{Z}$的函数,b_n是形如$n^{\alpha}\lambda^{-n}$函数的线性组合,其中λ是$f(z)$在$|z-z_0|\leqslant r$上的极点,α是小于λ的阶的非负整数。

证明: 不妨设 $z_0=0$。由有理函数的分解知,$f(z)$ 可以表为一多项式和若干形如$\frac{1}{(z-\lambda)^m}$的函数的线性组合,其中 λ 取遍 $f(z)$ 在复平面上的极点。而多项式是关于 z 的有限项正幂次级数,因此只需看$\frac{1}{(z-\lambda)^m}$的洛朗级数展开。

(Ⅰ) $\lambda=0$。此时$\frac{1}{z^m}$已经是 $r<|z|<R$ 内的洛朗展开,显然满足命题中要求的形式。

(Ⅱ) $\lambda\neq 0$。此时$\frac{1}{(z-\lambda)^m}=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\left(\frac{1}{\lambda-z}\right)^{(m-1)}$。

(a) 当 $|\lambda|\leqslant r$ 时,$\frac{1}{\lambda-z}=-\sum_{n=-1}^{-\infty}\lambda^{-n-1}z^n$,于是

$$\frac{1}{(z-\lambda)^m}=\frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!}\left(\sum_{n=-1}^{-\infty}\lambda^{-n-1}z^n\right)^{(m-1)}=\frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!}\sum_{n=-m}^{-\infty}\lambda^{-n-m}(n+m-1)\cdots(n+2)(n+1)z^n。$$

(b) 当 $|\lambda|\geqslant R$ 时,$\frac{1}{\lambda-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}z^n$,于是

$$\frac{1}{(z-\lambda)^m}=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}z^n\right)^{(m-1)}=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-m}(n+m-1)\cdots(n+2)(n+1)z^n。$$

故 $f(z)$ 在 $r<|z|<R$ 内的洛朗级数可以写为命题中要求的形式。

值得注意的是引理中的 n_0 是任意的,不同的 n_0 会影响引理中 $P(z)$ 的形式,但是不会影响 a_n 和 b_n 的表达式。

现在可以从定理 2 和引理 1 得到如下结论,即从有理函数的任一圆环域内的洛朗展开可以直接得到它在同圆心的每一个圆环域内的洛朗展开。

定理 3　设 $f(z)$ 是一个有理函数,且有引理 1 所述的洛朗展开

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}b_n(z-z_0)^n,r<|z-z_0|<R。$$

(Ⅰ) 如果 $R'\leqslant r$,那么 $f(z)$ 在其解析的圆环域 $r'<|z-z_0|<R'$ 内有洛朗展开

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}(a_n-b_n+c_n)(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}c_n(z-z_0)^n,$$

这里 c_n 是 b_n 写成形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$函数的线性组合时,其中位于 $|z-z_0|\leqslant r'$ 内的 λ 对应的项。

(Ⅱ) 如果 $r'\geqslant R$,那么 $f(z)$ 在其解析的圆环域 $r'<|z-z_0|<R'$ 内有洛朗展开

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}(b_n-a_n+c_n)(z-z_0)^n,$$

这里 c_n 是 a_n 写成形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$函数的线性组合时,其中位于 $|z-z_0|\geqslant R'$ 内的 λ 对应的项。

证明: (Ⅰ) 由定理 2 和题设可知 $f(z)$ 在 $r'<|z-z_0|<R'$ 内的洛朗展开具有如下形式:

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}(a_n+d_n)(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}(b_n+d_n)(z-z_0)^n,$$

其中,d_n 是形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$函数的线性组合。根据引理 1,$b_n$ 是形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$函数的线性组合,且 λ 是 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\leqslant r$ 上的极点;b_n+d_n 是形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$函数的线性组合,且 λ 是 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\leqslant r'$ 上的极点。因此 d_n 是形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$函数的线性组合,其中 λ 是 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\leqslant r$ 上的极点。同理,通过考虑 a_n 和 a_n+d_n 的形式可知 d_n 是形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$函数的线性组合,其中 λ 是 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\geqslant R'$ 上的极点。又因为 b_n+d_n 不含 $R'\leqslant|z-z_0|\leqslant r$ 中 λ 对应的 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$函数,因此 b_n+d_n 就是 b_n 中位于 $|z-z_0|\leqslant r'$ 内的 λ 对应的项。

(Ⅱ) 同理可证。

由定理 3,只要将有理函数 $f(z)$ 在某个圆环域如 $r<|z-z_0|<R$ 按照引理 1 的形式进行洛朗展开,即 $f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}b_n(z-z_0)^n$,那么 $f(z)$ 在任一圆环域 $r'<|z-z_0|<R'$ 内的洛朗级数可直接由上述洛朗级数得到。具体的做法是当 $R'\leqslant r$ 时,找到 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\leqslant r'$ 内的所有极点 λ,把 b_n 中的那

些形如$n^{\alpha}(\lambda-z_0)^{-n}$的线性组合作为 c_n，没有这样的极点时 $c_n=0$，则$f(z)$ 在圆环域 $r'<|z-z_0|<R'$内的洛朗级数必为$f(z)=P(z)+\sum\limits_{n\geqslant n_0}(a_n-b_n+c_n)(z-z_0)^n+\sum\limits_{n<n_0}c_n(z-z_0)^n$。当 $r'\geqslant R$ 时，找到$f(z)$ 在 $|z-z_0|\geqslant R'$内的所有极点 λ，把 a_n 中的那些形如 $n^{\alpha}(\lambda-z_0)^{-n}$的线性组合作为 c_n，没有这样的极点时 $c_n=0$，则$f(z)$ 在圆环域 $r'<|z-z_0|<R'$内的洛朗级数必为

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}(b_n-a_n+c_n)(z-z_0)^n。$$

特别地，当 $r'=0$ 或 $R'=+\infty$ 时，可以得到如下推论。

推论 1　设$f(z)$ 是一个有理函数，且按照引理 1 所述的洛朗展开式是

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}b_n(z-z_0)^n,r<|z-z_0|<R。$$

那么对足够小的正数 δ 和足够大的正数 X，必有洛朗展开

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}(a_n-b_n)(z-z_0)^n,0<|z-z_0|<\delta;$$

$$f(z)=P(z)-\sum_{n<n_0}(a_n-b_n)(z-z_0)^n,|z-z_0|>X。$$

3　结语

本文揭示了解析函数在不同圆环域上洛朗展开系数的联系。更具体地说，解析函数在同圆心的不同圆环域内洛朗级数系数与这两个圆环中间区域内的极点有密切关系。特别地，对于有理函数而言，可以从某一圆环域中的洛朗展开，直接得到其在任意同心圆环域内的洛朗展开式。

参　考　文　献

[1] 赵建丛，黄文亮. 复变函数与积分变换［M］. 3 版. 上海：华东理工大学出版社，2021：78-98.

[2] 李红，谢松法. 复变函数与积分变换［M］. 北京：高等教育出版社，1999：102-120.

[3] 钟玉泉. 复变函数论［M］. 5 版. 北京：高等教育出版社，2021：133-146.

[4] 王绵森. 复变函数［M］. 2 版. 北京：高等教育出版社，2020：96-99.

[5] BROWN J W，CHURCHILL R V. 复变函数及应用：英文版［M］. 9 版. 北京：机械工业出版社，2014：197-202.

[6] 任京男. 复变函数在极点邻域内的罗朗级数的系数公式［J］. 上海海运学院学报，2001(4)：80-82.

[7] 龙姝明，尹继武. Laurant 展开的技巧［J］. 汉中师范学院学报(自然科学)，2001(6)：54-58.

[8] COSTAKIS G，NESTORIDIS V，PAPADOPERAKIS I. Universal Laurent expansions of harmonic functions［J］. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2018，458(1)：281-299.

[9] LI C，HUANG C，WANG S，et al. A modified Laurent series for hole/inclusion problems in plane elasticity［J］. Z Angew Math Phys，2021(72)：124.

[10] 路见可，钟寿国，刘士强. 复变函数［M］. 2 版. 武汉：武汉大学出版社，2001：111-113.

[11] 史济怀，刘太顺. 复变函数［M］. 合肥：中国科学技术大学出版社，1998：193-195.

[12] 冯小高. 有理复变函数分解成部分分式的一种方法［J］. 高等数学研究，2013，16(1)：32-33.

Research on Laurent series of complex functions in different annulus

YUAN Zhijie，ZHANG Shenxing

(*School of Mathematics*，*Hefei University of Technology*，*Hefei* 230000，*China*)

Abstract: For the Laurent series of analytic functions in different circular domains with the same center，the relationship between the difference of the coefficients of these Laurent series and the poles of the function between the two circular domains is given. In particular，the Laurent expansion of a rational function in a certain circular domain can be directly obtained from its Laurent series in any circular domain with the same center.

Key words: analytic function; Laurent series ; rational function